I. Primitives d'une fonction numérique :

a. Définition :

- Une fonction F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I si $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

b. Exemple :

- Fonction primitive de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \to x^2 + 3x$.
- Fonction primitive de la fonction $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = 3 + \sin x$.

c. Propriété :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I .

d. Propriété :

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I

- Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c \; ; \; (c \in \mathbb{R})$.

e. Exemple :

Les fonctions primitives de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F(x) = x^2 + 3x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

f. Propriété :

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I

$x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

g. Exemple :

Déterminer la fonction primitive de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 (zéro) en -1 .

Les primitives de f sont de la forme $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + c \; ; \; c \in \mathbb{R}$

Puisque $F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2 + 3\times(-1) + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 4 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{15}{4}$$

Conclusion : La fonction primitive de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 (zéro) en -1 est :

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + \frac{15}{4} .$$

II. Fonctions primitives de la somme de deux fonctions – le produit d'une fonction par un réel α :

a. Propriété :

F et **G** sont les primitives respectivement de **f** et **g** sur I on a :
- $F+G$ est une primitive de $f+g$.
- αF est une primitive de αf .

b. Exemple :

Soient $f(x)=3x$ et $g(x)=\cos(x)$, leurs fonctions primitives sont respectivement $F(x)=6x^2+c$ et $G(x)=\sin x+c'$ avec c et c' $\in\mathbb{R}$

III. Operations sur les fonctions primitives - Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

Operations sur les fonctions primitives

Fonction h	H primitive de h
$h=f'+g'$	$H=f+g$
$h=\alpha f'$	$H=\alpha f$
$h=f'\times g+f\times g'$	$H=f\times g$
$h=-\frac{g'}{g^2}$	$H=\frac{1}{g}$
$h=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	$H=\frac{f}{g}$
$h=f'\times f^n$ $n\neq-1$ مع	$H=\frac{1}{n+1}f^{n+1}$
$h=f'\times f^r$ $r\neq-1$ مع	$H=\frac{1}{r+1}f^{r+1}$
$h=f'\times g'\circ f$	$H=g\circ f$
$h=f'(ax+b)$ $a\neq0$	$H=\frac{1}{a}f(ax+b)$

Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

Fonction f	F primitives de f $(c\in\mathbb{R})$
$f(x)=0$	$F(x)=c$
$f(x)=a;(a\in\mathbb{R})$	$F(x)=ax+c$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$f(x)=x^r;(r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\})$	$F(x)=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+c$
$f(x)=\sin(ax+b)$ $a\neq0$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)+c$
$f(x)=\cos(ax+b)$ $a\neq0$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$f(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan(x)+c$
$f(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$F(x)=2\sqrt{f(x)}+c$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$